A Theorem on the Exact Solution of a Spin System in a Finite Magnetic Field

鈴木, 増雄

A Theorem on the Exact Solution of a Spin System in a Finite Magnetic Field

鈴　木　増　雄（東大理）

（8月21日 受理）

最近、二次相転移の問題、特に、Spin 系の転移点近傍に於けるsingularity の問題が、いろいろな立場から、盛んに研究されつつある。しかし、exact に解けているのは、磁場のない二次元Ising model だけである[1]。磁気的性質、特に、帯磁率等を調べるには、磁場のあるSpin 系の問題を解くことが重要になつてくる。だが、その問題をexact に解くのは非常に難かしい。それは一つには、その数学的構造がある(Spin) operator の双二次型式になつていないからである。磁場の無い場合は、二次型式になつている為、diagonalize することが出来て、exact に解けた。

ここでは、磁場の有るSpin 系の解を、磁場の無いSpin 系の解から導くtheorem を与える。今、磁場の有るSpin系（これをA-lattice としよう）の状態和を$Z(K_A, H)$としよう（Spinの数$N\to\infty$）; $K_A = J_A/kT$, J_A = ferromagnetic Ising, Heisenberg の any other ferromagnetic interaction。次に、同じlattice structure を持ち、ferromagnetic Ising, Heisenberg 又は他のferromagnetic interaction (A-lattice と同じで無くてもよい。）を持つたB-lattice をA-lattice に対応させる。そして、A-lattice とB-lattice をIsing interaction $(-J_{AB})S_{iA}^z \cdot S_{iB}^z$ ($J_{AB}>0$, i はlattice point) で結ぶ。このcompound Spin system の状態和を$Z(K_A, K_{AB}, K_B)$; $K_{AB}=J_{AB}/kT$, $K_B=J_B/kT$ としよう。ここで、もし、K_A, K_{AB} をfix して、ferromagnetic exchange interaction J_B を無限に大きくしてやると、（又は、B-lattice の温度を零に近づける、とにかく、$K_B\to\infty$）B-lattice の全てのSpin が、どんな次元でも完全にferro にそろつてしまう。即ち、Spin average $\langle S_B^z\rangle = 1$。言いかえれば、全てのB-Spin は、凍りついてしまう。すると、Ising interaction $(-J_{AB})S^z_{iA}S^z_{iB}$ は $(-J_{AB})S^z_{iA}$ となり、A-Spin には、磁場 J_{AB}/m （m ; Spin 一個当りの磁気モーメント）が apply されたのと等価になる。依つて、次の theorem が成り立つ。

〔Theorem〕

$$Z(K_A, H) = \lim_{K_B\to\infty} \frac{Z(K_A, mH/kT, K_B)}{Z(K_B)} \tag{1}$$

（何次元でも、どんな ferromagnetic interaction でもよい。）$Z(K_B)$ は、磁場の無い B-lattice の状態和。分母は、規格化の為に必要である。この theorem から、容易に、自発磁化に対する次の公式が得られる。

$$M_s = m \cdot \lim_{J_{AB}\to 0} \lim_{K_B\to\infty} \langle S^z_A S^z_B \rangle \ , \tag{2}$$

ここに、S^z_A，S^z_B は、それぞれ、A-lattice, B-lattice の隣り合つた任意の Spin である。

この theorem を check する例として、磁場のある一次元 Ising model をとりあげよう。これは、既に、exact に解かれている。Fig.1 は、この場合の compound lattice を表わしている。

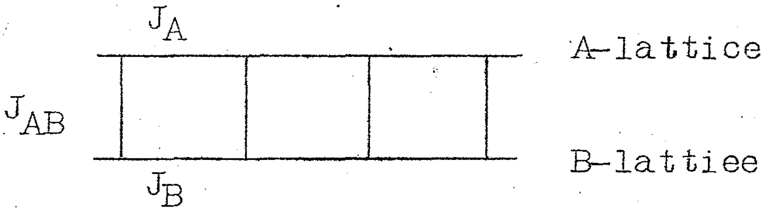


Fig.1

次のような transfer matrix V を用いて、$Z(K_A, K_{AB}, K_B)$ を容易に求める事が出来る；

$$V = \begin{pmatrix} 1/abc & b/a & a/b & ab/c \\ b/a & c/ab & abc & a/b \\ a/b & abc & c/ab & b/a \\ ab/c & a/b & b/a & 1/abc \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a &= \exp(-K_A) \\ b &= \exp(-K_B) \\ c &= \exp(-K_{AB}) \end{aligned} \tag{3}$$

この matrix V は、中心関して対称であるから、（2次元）×（2次元）matrix に reduce 出来る (Appendix)。依つて、この最大固有値 λ_m は、

$$\lambda_m \equiv Z(K_A, K_{AB}, K_B) = 2\cosh(K_A+K_B)\cosh K_{AB} + D^{\frac{1}{2}}, \cdots \tag{4}$$

$$D= \cosh^2(K_A+K_B)\cosh^2 K_{AB} - \sinh 2K_A \sinh 2K_B \,. \tag{5}$$

故に

$$Z(K_A, H) = \lim_{K_B\to\infty} \left.\frac{\lambda_m(K_A, K_{AB}\cdot K_B)}{2\cosh K_B}\right|_{K_{AB}=mH/kT\equiv h}$$

$$\equiv \exp K_A \cdot \{\cosh h + (\sinh^2 h + \exp(-4K_A))^{\frac{1}{2}}\} \tag{6}$$

これは、普通得られている公式と一致する[2)]。同様にして

$$\langle S_A^z S_B^z\rangle = \frac{\partial}{\partial K_{AB}} \log Z(K_A, K_{AB}, K_B)$$

$$= \frac{\cosh(K_A+K_B)\sinh K_{AB}}{\{\cosh^2(K_A+K_B)\cosh^2 K_{AB} - \sinh 2K_A \sinh 2K_B\}^{\frac{1}{2}}} \tag{7}$$

$$\therefore \lim_{K_B\to\infty} \langle S_A^z S_B^z\rangle = \sinh K_{AB} / \{\cosh^2 K_{AB} - (1-e^{-4K_A})\}^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

故に

$$M_S = \lim_{J_{AB}\to 0}\lim_{K_A\to\infty} \langle S_A^z S_B^z\rangle = \begin{cases} 1 & \cdots T=0 \\ 0 & \cdots T>0 \end{cases} \tag{9}$$

これは良く知られた結果である。

次に、磁場中の二次受 Ising model を解くには、Fig.2 のような two layers Ising model を解くか又は、Fig.3 のような next nearest

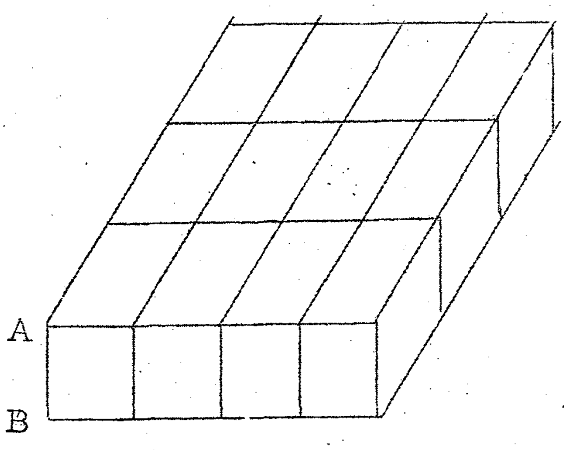
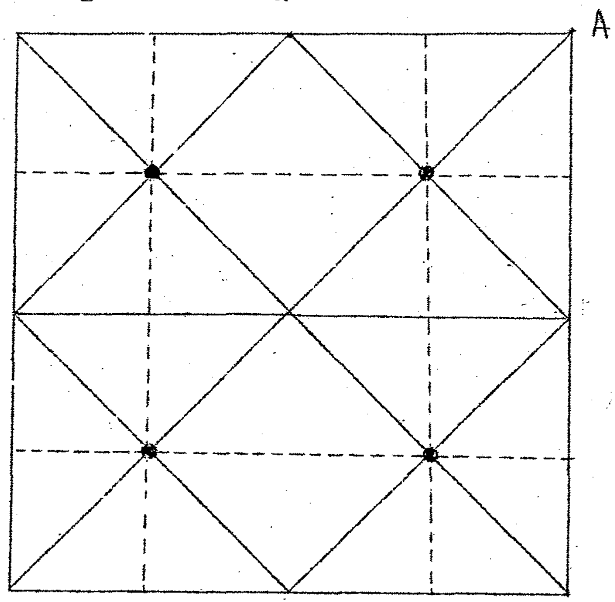


Fig. 2



• … B　　Fig. 3

interaction model を解きさえすればよい。第2の case では、 theorem は次のように表わされる。

$$Z(K_A, H) = \lim_{K_B \to \infty} Z(K_A, mH/4kT, K_B)/Z(K_B) \quad (10)$$

最後に、上の theorem を用いて、磁場があると Spin 系の状態和の singularity は消えることを議論してみよう。ferromagnetic Ising model (又は lattice gas) の場合には、Lee と Yang[3] がこれを証明した。さて、compound A-B lattice が、$J_{AB} \fallingdotseq 0$ では、ただ一つの singular point (即ち、Curie 点) 持つという、物理的に natural な要請を認めるならば、次のようにして、上の事をもつと一般に示すことが出来る。(1)式に於いて、$Z(K_B)$ の singular point は、$J_B \to \infty$ と共に、infinite になる。又 $Z(K_A, K_{AB}, K_B)$ の singlar point T_c は、次のように表わされる。

$$f(J_A/kT_c, J_{AB}/kT_c, J_B/kT_c) = 0 \quad (11)$$

ここで、この解 T_c がただ一つということから、(11) 式を、次のように書き直せる。

$$kT_c = J_B\, g(J_A/kT_c, J_{AB}/kT_c)\,. \quad (12)$$

故に、$J_B \to \infty$ と共に $T_c \to \infty$ ($g(0, 0) \fallingdotseq 0$ でなければならない)。故に、$H \fallingdotseq 0$ の場合には、$Z(K_A, H)$ の singular point は無くなる。

有意義な discussion をして下さつた久保先生に感謝致します。

References

1) L. Onsager, Phys. Rev. 65 (1943) 117.
2) C. Domb, Adv. Phys. 9 (1960) 149.
3) T.D. Lee and C.N. Yang, Phys. Rev. 87 (1952) 410.

(Appendix)

中心対称の行列式は、次のように reduce される。n 次元中心対称行列を (x_{ij}) とすると、

$$x_{ij} = x_{n-j+1, n-i+1}$$

〔公式 1〕 $n=2p\ (p=1,2,\cdots)$ の時、

$$\det(x_{ij}) = \begin{vmatrix} x_{11}+x_{1n}, & \cdots, & x_{1p}+x_{1p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{p1}+x_{pn}, & \cdots, & x_{pp}+x_{pp+1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_{11}-x_{1n}, & \cdots, & x_{1p}-x_{1p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{p1}-x_{pn}, & \cdots, & x_{pp}-x_{pp+1} \end{vmatrix}$$

〔公式 2〕 $n=2p+1$ の時

$$\det(x_{ij}) = \begin{vmatrix} x_{11}+x_{1n}, & \cdots, & x_{1p}+x_{1p+2}, & 2x_{1p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{p1}+x_{pn}, & \cdots, & x_{pp}+x_{pp+2}, & 2x_{p,p+1} \\ x_{p+11}, & \cdots, & x_{p+1,p}, & x_{p+1,p+1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_{11}-x_{1n}, & \cdots, & x_{1p}-x_{1\,p+2} \\ \cdots & \cdots, & \cdots \\ x_{p1}-x_{pn}, & \cdots, & x_{pp}-x_{pp+2} \end{vmatrix}$$

物性四の六

二外